2024 年河南省普通高中毕业班高考适应性测试

数学试题参考答案及评分标准

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. D　　2. A　　3. A　　4. B　　5. D　　6. C　　7. A　　8. B

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分,部分选对的得 3 分,有选错的得 0 分.

9. ACD　　10. ABD　　11. AC

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. $\sqrt{6}$　　13. -560　　14. $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分.

15. 解:(1)因为$\sqrt{3}\sin 2C-2\cos^2 C=1$,所以$\sqrt{3}\sin 2C-(1+\cos 2C)=1$, ………… 2 分

即 $2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2C-\dfrac{1}{2}\cos 2C\right)=2$. 所以 $\sin\left(2C-\dfrac{\pi}{6}\right)=1$. ………… 4 分

因为 C 是$\triangle ABC$ 的内角,所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$. ………… 6 分

(2)因为向量 $\boldsymbol{m}=(1,\sin A)$与向量 $\boldsymbol{n}=(\sin B,-2)$垂直,所以 $\sin B-2\sin A=0$.

由正弦定理可得 $b-2a=0$. 所以 $b=2a$. ………… 10 分

由余弦定理可得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,$c=2\sqrt{3}$,即 $12=a^2+(2a)^2-2\cdot a\cdot 2a\cdot\dfrac{1}{2}$.

解得 $3a^2=12$,$a=2$. 所以 a 的值为 2. ………… 13 分

16. 解:(1)如图 1,连接 BD,交 AC 于点 O,连接 EO.

$\because$　$PB /\!/$平面 AEC,$PB\subset$平面 PBD,平面 $PBD\cap$平面 $AEC=EO$,

$\therefore$　$EO/\!/PB$. ………… 4 分

又 O 为 BD 的中点,

$\therefore$　E 为 PD 的中点,即$\dfrac{PE}{PD}=\dfrac{1}{2}$. ………… 7 分

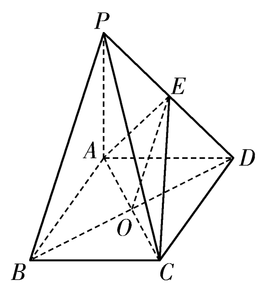

图 1

(2)如图 2,以 A 为坐标原点,AB,AD,AP 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴建立空间直角坐标系.

则 $A(0,0,0)$,$C(2,1,0)$,$B(2,0,0)$,$E\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

$\therefore$　$\overrightarrow{AC}=(2,1,0)$,$\overrightarrow{AE}=\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$. ………… 9 分

$\because$　$PA\perp$平面 $ABCD$,

$\therefore$　平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$. ………… 11 分

设平面 AEC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

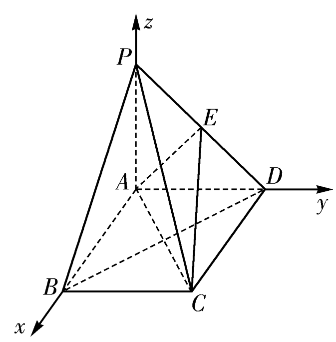

图 2

则$\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2x+y=0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=0. \end{cases}$

令 $y=-2$,得 $\boldsymbol{n}=(1,-2,2)$. ·· 13 分

$\therefore \quad \cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}> = \frac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|} = \frac{2}{3}$.

$\therefore$ 平面 ABC 与平面 AEC 的夹角的余弦值为$\frac{2}{3}$. ··· 15 分

17. 解:(1)$f(0)=1$,切点为$(0,1)$,$f'(x)=me^{mx}+2x-m$, ·· 2 分

$f'(0)=me^0+2\times0-m=0$, ··· 3 分

所以切线的斜率为 0,在点$(0,f(0))$处的切线方程为 $y=1$. ·· 5 分

(2)令 $g(x)=f'(x)=me^{mx}+2x-m$,则 $g'(x)=m^2e^{mx}+2>0$. 所以 $g(x)$为单调递增函数.

因为 $g(0)=f'(0)=0$,所以 $x\in[-1,0)$时,$f'(x)<0$;$x\in(0,1]$时,$f'(x)>0$.

所以$f(x)$在$[-1,0)$单调递减,在$(0,1]$单调递增. ··· 7 分

若对于任意 $x\in[-1,1]$,都有 $f(x)\leqslant e$ 恒成立,即只需 $f(x)_{\max}\leqslant e$.

因为$f(x)$在$[-1,0)$单调递减,在$(0,1]$单调递增,

所以$f(x)$的最大值为$f(-1)$和$f(1)$中最大的一个.

所以$\begin{cases} f(1)\leqslant e, \\ f(-1)\leqslant e, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^m+1-m\leqslant e, \\ e^{-m}+1+m\leqslant e. \end{cases}$ ··· 10 分

设 $h(x)=e^x-x-e+1$,$h'(x)=e^x-1$,所以 $h(x)$在$(-\infty,0)$单调递减,在$(0,+\infty)$单调递增.

$h(1)=0$,$h(-1)=\frac{1}{e}+2-e<0$,故当 $x\in[-1,1]$时,$h(x)\leqslant0$.

当 $m\in[-1,1]$时,$h(m)\leqslant0$,$h(-m)\leqslant0$,则$\begin{cases} e^m+1-m\leqslant e, \\ e^{-m}+1+m\leqslant e \end{cases}$成立. ··························· 12 分

当 $m>1$ 时,由 $h(x)$的单调性,$h(m)>0$,即 $e^m-m+1>e$,不符合题意.

当 $m<-1$ 时,$h(-m)>0$,即 $e^{-m}+m+1>e$,也不符合题意.

综上,m 的取值范围为$[-1,1]$. ·· 15 分

18. 解:(1)由$|A_1A_2|=2$ 知,$A_1(-1,0)$,$A_2(1,0)$,$a=1$.

当 $PQ/\!/x$ 轴时,根据双曲线的对称性,不妨设点 $P(x_p,y_p)$在第一象限,则由$|PQ|=4$,可得 $x_p=2$. 代入双曲线 C 的方程,得 $y_p=\frac{b}{a}\sqrt{4-a^2}=\sqrt{3}b$. ·· 3 分

因为四边形 PQA_1A_2 的面积为 $3\sqrt{6}$,所以$\frac{|PQ|+|A_1A_2|}{2}\times y_p=\frac{2+4}{2}\times\sqrt{3}b=3\sqrt{6}$.

解得 $b=\sqrt{2}$.

所以双曲线 C 的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$. ·· 7 分

(2)因为 $\overrightarrow{ON}=2\overrightarrow{OM}$,所以可设 $M(0,t)$,$N(0,2t)$$(t\neq0)$.

直线 A_1P 的方程为 $y=t(x+1)$,直线 A_2Q 的方程为 $y=-2t(x-1)$.

又双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$,

显然直线 A_1P 与双曲线 C 的两支各交于一点，直线 A_2Q 与双曲线 C 的右支交于两点，

则有 $\begin{cases}|t|<\sqrt{2},\\2|t|>\sqrt{2}.\end{cases}$ 解得 $\frac{\sqrt{2}}{2}<|t|<\sqrt{2}$. ………………………………………………………… 10 分

由 $\begin{cases}y=t(x+1),\\x^2-\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 消去 y，得 $(t^2-2)x^2+2t^2x+(t^2+2)=0$.

设点 $P(x_p,y_p)$，则 $x_p\cdot(-1)=\frac{t^2+2}{t^2-2}$. 解得 $x_p=-\frac{t^2+2}{t^2-2}$.

所以 $y_p=t\left(-\frac{t^2+2}{t^2-2}+1\right)=-\frac{4t}{t^2-2}$.

由 $\begin{cases}y=-2t(x-1),\\x^2-\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 消去 y，得 $(2t^2-1)x^2-4t^2x+(2t^2+1)=0$.

设点 $Q(x_Q,y_Q)$，则 $x_Q\cdot 1=\frac{2t^2+1}{2t^2-1}$. 解得 $x_Q=\frac{2t^2+1}{2t^2-1}$.

所以 $y_Q=-2t\left(\frac{2t^2+1}{2t^2-1}-1\right)=-\frac{4t}{2t^2-1}$. ………………………………………………………… 13 分

当直线 PQ 不垂直于 x 轴时，$k_{PQ}=\frac{y_P-y_Q}{x_P-x_Q}=\frac{t}{t^2-1}$.

所以直线 PQ 的方程为 $y+\frac{4t}{t^2-2}=\frac{t}{t^2-1}\left(x+\frac{t^2+2}{t^2-2}\right)$. ……………………………………………… 14 分

所以 $y=\frac{-4t}{t^2-2}+\frac{t}{t^2-1}\left(x+\frac{t^2+2}{t^2-2}\right)$，也即 $y=\frac{t}{t^2-1}(x-3)$.

显然直线 PQ 恒过定点 $(3,0)$. ………………………………………………………………………… 16 分

当直线 PQ 垂直于 x 轴时，由 $x_P=x_Q$，得 $t^2=1$. 此时 $x_P=x_Q=3$.

直线 PQ 的方程为 $x=3$，恒过定点 $(3,0)$.

综上可知，直线 PQ 恒过定点 $(3,0)$. ………………………………………………………………… 17 分

19. 解：(1) 由题意知，$X=0,1,2,3$. ………………………………………………………………………… 1 分

$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$,

$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$,

$P(X=2)=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{24}$,

$P(X=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$. ………………………………………………………………………………… 3 分

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{8}$

………………………………………………………………………………… 4 分

随机变量 X 的数学期望为 $E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{7}{24}+3\times\frac{1}{8}=\frac{11}{8}$. ………………………………… 6 分

(2)由于投掷 n 次骰子后球不在乙手中的概率为 $1-p_n$,此时无论球在甲手中还是球在丙手中,均有 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ 的概率传给乙,故有 $p_{n+1}=\frac{1}{2}(1-p_n)$. ………………………………… 8 分

变形为 $p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)$.

又 $p_1=\frac{1}{2}$,所以数列 $\left\{p_n-\frac{1}{3}\right\}$ 是首项为 $p_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$,公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列. ………………… 10 分

所以 $p_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$.

所以数列 $\{p_n\}$ 的通项公式 $p_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$. ………………………………… 12 分

(3)由(2)可得 $d_n=\frac{2}{|3p_n-1|}-2=2^{n+1}-2$. 则 $\frac{d_n}{d_{n+1}}=\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+2}-2}=\frac{2^n-1}{2^{n+1}-1}=\frac{2^n-1}{2\left(2^n-\frac{1}{2}\right)}<\frac{1}{2}$.

所以 $\frac{d_1}{d_2}+\frac{d_2}{d_3}+\cdots+\frac{d_n}{d_{n+1}}<\frac{n}{2}$. ………………………………… 14 分

又因为 $\frac{d_n}{d_{n+1}}=\frac{2^n-1}{2^{n+1}-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2^{n+1}-1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 2^n+2^n-2}\geqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n}\ (n\in\mathbf{N}^*)$,

所以 $\frac{d_1}{d_2}+\frac{d_2}{d_3}+\cdots+\frac{d_n}{d_{n+1}}\geqslant\frac{n}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{n}{2}-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)>\frac{n}{2}-\frac{1}{3}$.

综上,$\frac{n}{2}-\frac{1}{3}<\frac{d_1}{d_2}+\frac{d_2}{d_3}+\cdots+\frac{d_n}{d_{n+1}}<\frac{n}{2}\ (n\in\mathbf{N}^*)$. ………………………………… 17 分