座位号________ 考场号________ 考生号________ 姓名________ 县（市、区）________

绝密★启用前

2024年河南省普通高中毕业班高考适应性测试

数　学

本试卷共4页,19小题,满分150分,考试时间120分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的考生号、姓名、考点学校、考场号及座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需要改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M=\{x\mid\sqrt{x-1}<4\}$,$N=\{x\mid-2<x\leqslant3,x\in\mathbf{Z}\}$,则 $M\cap N=$

A. $\{x\mid1<x\leqslant3\}$　　B. $\{x\mid1\leqslant x\leqslant3\}$　　C. $\{2,3\}$　　D. $\{1,2,3\}$

2. 在复平面内,复数 z_1 对应的点与复数 $z_2=\dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$对应的点关于实轴对称,则 $z_1=$

A. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　　B. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

C. $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　　D. $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

3. 已知 $\lg2\approx0.3010$,$\lg3\approx0.4771$,则 $\log_4 12$ 的值大约为

A. 1.79　　B. 1.81　　C. 1.87　　D. 1.89

4. 已知一个圆柱和一个圆锥的底面半径和高分别相等,圆柱的轴截面是一个正方形,则这个圆柱的侧面积和圆锥的侧面积的比值是

A. $\dfrac{\sqrt5}{4}$　　B. $\dfrac{4\sqrt5}{5}$　　C. $\dfrac{\sqrt5}{2}$　　D. $\dfrac{2\sqrt5}{5}$

5. 函数 $y=f(x)$的图象由函数 $y=2\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$的图象向左平移 $\varphi(\varphi>0)$个单位长度得到,若函数 $y=f(x)$的图象关于原点对称,则 φ 的最小值为

A. $\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{\pi}{2}$　　C. $\dfrac{3\pi}{4}$　　D. $\dfrac{3\pi}{2}$

6. 已知抛物线 $y^2=2x$ 的焦点为 F,过点 F 的直线 l 与抛物线交于 A,B 两点,若$\triangle AOF$ 的面积是$\triangle BOF$ 的面积的两倍,则$|AB|=$

A. 2　　B. $\dfrac{5}{2}$　　C. $\dfrac{9}{4}$　　D. $\dfrac{11}{4}$

7. 已知 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=4$，则 $\tan 4\alpha$ 的值为

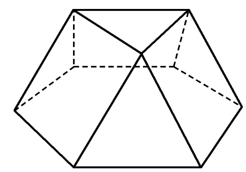
A. $-\frac{4}{3}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $\frac{8}{5}$　　D. 2

8. 对于数列 $\{a_n\}$，定义 $A_n=a_1+3a_2+\cdots+3^{n-1}a_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的“加权和”. 设数列 $\{a_n\}$ 的“加权和”$A_n=n\cdot 3^n$，记数列 $\{a_n+pn+1\}$ 的前 n 项和为 T_n，若 $T_n\leqslant T_5$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，则实数 p 的取值范围为

A. $\left[-\frac{16}{7},-\frac{7}{3}\right]$　　B. $\left[-\frac{12}{5},-\frac{7}{3}\right]$　　C. $\left[-\frac{5}{2},-\frac{12}{5}\right]$　　D. $\left[-\frac{16}{7},-\frac{9}{4}\right]$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 约翰逊多面体是指除了正多面体、半正多面体（包括 13 种阿基米德多面体、无穷多种侧棱与底棱相等的正棱柱、无穷多种正反棱柱）以外，所有由正多边形面组成的凸多面体. 其中，由正多边形构成的台塔是一种特殊的约翰逊多面体，台塔，又叫帐塔、平顶塔，是指在两个平行的多边形（其中一个的边数是另一个的两倍）之间加入三角形和四边形所组成的多面体. 各个面为正多边形的台塔，包括正三、四、五角台塔. 如图是所有棱长均为 1 的正三角台塔，则该台塔



A. 共有 15 条棱　　B. 表面积为 $3+2\sqrt{3}$　　C. 高为$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D. 外接球的体积为$\frac{4}{3}\pi$

10. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$，满足 $2f(x+y)f(x-y)=f(2x)+f(2y)$，且 $f(1)=-1$，则下列说法正确的是

A. $f(0)=1$　　B. $f(x)$ 为偶函数　　C. $f(2x)=f(x)$　　D. 2 是函数 $f(x)$ 的一个周期

11. 泰戈尔说过一句话：世界上最远的距离，不是树枝无法相依，而是相互了望的星星，却没有交汇的轨迹；世界上最远的距离，不是星星之间的轨迹，而是纵然轨迹交汇，却在转瞬间无处寻觅. 已知点 $F(2,0)$，直线 $l:x=\frac{9}{2}$，动点 P 到点 F 的距离是点 P 到直线 l 的距离的 $\frac{2}{3}$. 若某直线上存在这样的点 P，则称该直线为“最远距离直线”. 则下列结论中正确的是

A. 点 P 的轨迹方程是$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

B. 直线 $l_1:\frac{x}{9}+\frac{y}{5}=1$ 是“最远距离直线”

C. 点 P 的轨迹与圆 $C:x^2+y^2-2x=0$ 没有交点

D. 平面上有一点 $A(-1,1)$，则 $2|PA|+3|PF|$ 的最小值为$\frac{33}{2}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知圆 $C_1: x^2+y^2+4x-4y-1=0$，圆 $C_2: x^2+y^2-2x-6y+9=0$，直线 l 分别与圆 C_1 和圆 C_2 切于 M,N 两点，则线段 MN 的长度为____________.

13. $\left(x+\dfrac{1}{2x}-2y\right)^7$ 的展开式中 x^2y^3 的系数为____________.

14. 若 $a>0, b>0$，且 $a+b=1$，则$\dfrac{2a}{a^2+b}+\dfrac{b}{a+b^2}$的最大值是____________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分)

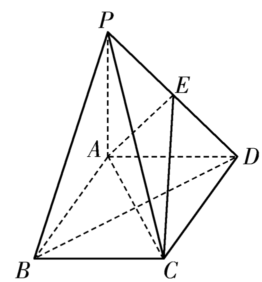
已知$\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，$c=2\sqrt{3}$，且$\sqrt{3}\sin 2C-2\cos^2 C=1$.

(1) 求角 C 的大小；

(2) 若向量 $\boldsymbol{m}=(1,\sin A)$ 与向量 $\boldsymbol{n}=(\sin B,-2)$ 垂直，求 a 的值.

16. (15 分)

在如图所示的四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 为矩形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，E 为线段 PD 上的动点.



(1) 若 $PB\parallel$平面 AEC，求$\dfrac{PE}{PD}$的值；

(2) 在(1)的条件下，若 $PA=AD=1$，$AB=2$，求平面 ABC 与平面 AEC 夹角的余弦值.

17. (15 分)

已知函数 $f(x)=e^{mx}+x^2-mx$，$m\in\mathbf{R}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

(2) 若对于任意 $x\in[-1,1]$，都有 $f(x)\leqslant e$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

18. (17 分)

已知 A_1, A_2 分别为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右顶点，$|A_1A_2|=2$，动直线 l 与双曲线 C 交于 P,Q 两点. 当 $PQ\parallel x$ 轴，且$|PQ|=4$ 时，四边形 PQA_1A_2 的面积为 $3\sqrt{6}$.

(1) 求双曲线 C 的标准方程.

(2) 设 P,Q 均在双曲线 C 的右支上，直线 A_1P 与 A_2Q 分别交 y 轴于 M,N 两点，若 $\overrightarrow{ON}=2\overrightarrow{OM}$，判断直线 l 是否过定点. 若过，求出该定点的坐标；若不过，请说明理由.

19.（17 分）

甲、乙、丙三人进行传球游戏，每次投掷一枚质地均匀的正方体骰子决定传球的方式：当球在甲手中时，若骰子点数大于3，则甲将球传给乙，若点数不大于3，则甲将球保留；当球在乙手中时，若骰子点数大于4，则乙将球传给甲，若点数不大于4，则乙将球传给丙；当球在丙手中时，若骰子点数大于3，则丙将球传给甲，若骰子点数不大于3，则丙将球传给乙. 初始时，球在甲手中.

（1）设前三次投掷骰子后，球在甲手中的次数为 X，求随机变量 X 的分布列和数学期望；

（2）投掷 n 次骰子后（$n\in\mathbf{N}^*$），记球在乙手中的概率为 p_n，求数列 $\{p_n\}$ 的通项公式；

（3）设 $d_n=\dfrac{2}{|3p_n-1|}-2$，求证：$\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{3}<\dfrac{d_1}{d_2}+\dfrac{d_2}{d_3}+\cdots+\dfrac{d_n}{d_{n+1}}<\dfrac{n}{2}$（$n\in\mathbf{N}^*$）.