2022年河南省普通高中毕业班高考适应性测试

理科数学试题参考答案及评分标准

一、选择题（每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	B	D	B	C	A	B	C	D	A	B	C

二、填空题（每小题5分，共20分）

13. 1　　14. $\frac{5}{12}$　　15. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　16. $\sqrt{7}$

三、解答题

（一）必考题：共60分。

17. 解：

（1）由正弦定理，得 $a^2=b^2+c^2+bc$. 所以 $b^2+c^2-a^2=-bc$.

由余弦定理，得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{-bc}{2bc}=-\frac{1}{2}$. ………………………… 4分

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$. ………………………… 5分

（2）由正弦定理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，得

$b+\lambda c=\frac{2\sqrt{3}}{3}(\sin B+\lambda\sin C)=\frac{2\sqrt{3}}{3}[\sin(A+C)+\lambda\sin C]$

$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\sin C\right]=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{3}{4}+\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2}\sin(C+\varphi)$，………………………… 9分

其中 $\tan\varphi=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\lambda-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2\lambda-1}$.

因为 $C\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，要使 $b+\lambda c$ 存在最大值，即 $C+\varphi=\frac{\pi}{2}$ 有解，

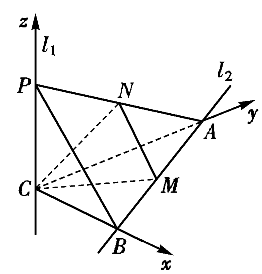
所以 $\varphi\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$. 从而 $\frac{\sqrt{3}}{2\lambda-1}>\frac{\sqrt{3}}{3}$. 所以正数 λ 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2},2\right)$. ………………………… 12分

18. 解：

（1）在 $\triangle PAC$ 中，$\because PC=AC=a$，$PA=\sqrt{2}a$，$\therefore PC^2+AC^2=PA^2$. $\therefore PC\perp AC$.

$\because l_1,l_2$ 是两条互相垂直的异面直线，点 P,C 在直线 l_1 上，点 A,B 在直线 l_2 上，

$\therefore PC\perp AB$. 又 $AC\cap AB=A$，$\therefore PC\perp$ 平面 ABC. ………………………… 6分



（2）方案一：选择②④可确定 $\cos\theta$ 的大小.

$\because AC\perp BC$，且 $AB=\sqrt{2}a$，$AC=a$，$\therefore BC=a$. 以 C 为坐标原点，$\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CP}$ 的方向为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $C-xyz$，

则 $C(0,0,0)$，$B(a,0,0)$，$A(0,a,0)$，$P(0,0,a)$.

又 $\because M,N$ 分别是线段 AB,AP 的中点，$\therefore M\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)$，$N\left(0,\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$.

$\because AC\perp$ 平面 PBC, $\therefore \overrightarrow{CA}=(0,a,0)$ 是平面 PBC 的一个法向量.

设平面 MNC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$. 由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{CN},\\ \boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{CM}\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\frac{a}{2}y+\frac{a}{2}z=0,\\ \frac{a}{2}x+\frac{a}{2}y=0.\end{cases}$

取 $y=1$, 得 $\boldsymbol{n}=(-1,1,-1)$ 为平面 MNC 的一个法向量. …………………………………………… 9 分

$\therefore \cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{CA}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{CA}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………………………………………………… 12 分

方案二:选择③④可确定 $\cos\theta$ 的大小.

$\because CM\perp AB$, $\therefore BC=AC=a$. 又 $BC\perp AC$, 下同方案一.

方案三:选择②③可确定 $\cos\theta$ 的大小.

$\because CM\perp AB$, $\therefore BC=AC=a$. 又 $AB=\sqrt{2}a$, $\therefore BC\perp AC$. 下同方案一.

(注:①④等价,不能确定;①②可转化为②④,①③可转化为③④)

19. 解:

(1)若甲通过测试,则甲的得分 X 为 4 或 5,

$P(X=4)=0.9\times0.5\times0.5=0.225$,

$P(X=5)=0.1\times0.5\times0.5+0.1\times0.5=0.025+0.05=0.075$,

所以甲通过测试的概率为 $P=P(X=4)+(X=5)=0.225+0.075=0.3$. ……………………………… 4 分

(2) Y 的可能取值为 0,2,3,4,5.

$P(Y=0)=0.8\times0.6\times0.6=0.288$,

$P(Y=2)=0.8\times0.4\times0.6+0.8\times0.6\times0.4=0.384$,

$P(Y=3)=0.2\times0.6\times0.6=0.072$,

$P(Y=4)=0.8\times0.4\times0.4=0.128$,

$P(Y=5)=0.2\times0.6\times0.4+0.2\times0.4=0.128$. ………………………………………………………… 8 分

所以 Y 的分布列为

Y	0	2	3	4	5
P	0.288	0.384	0.072	0.128	0.128

(3)甲的水平较高. 理由如下:

乙通过测试的概率为 $P=P(Y=4)+P(Y=5)=0.128+0.128=0.256$, 甲通过测试的概率为 0.3. 因为 $0.3>0.256$, 所以甲通过测试的概率大于乙通过测试的概率. 所以甲的水平较高. ……………… 12 分

20. 解:

(1)由题意知, $f(x)=(x-1)\ln x$, $f'(x)=\ln x+1-\dfrac{1}{x}(x>0)$, $f''(x)=\dfrac{x+1}{x^2}>0$.

所以函数 $f'(x)$ 单调递增.

又 $f'(1)=0$, 所以当 $0<x<1$ 时, $f'(x)<0$, 函数 $f(x)$ 单调递减;当 $x>1$ 时, $f'(x)>0$, 函数 $f(x)$ 单调递增.

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………………… 5 分

(2)由题意知, $f'(x)=\ln x+1-\dfrac{a}{x}(x>0)$, $f''(x)=\dfrac{x+a}{x^2}>0$. 所以函数 $f'(x)$ 单调递增.

令 $h(x)=\ln x-x+1$，则 $h'(x)=\dfrac{1-x}{x}$.

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)>0$，函数 $h(x)$ 单调递增；当 $x>1$ 时，$h'(x)<0$，函数 $h(x)$ 单调递减.

所以 $h(x)_{\max}=h(1)=0$，即 $\ln x\leqslant x-1$. ………………………………………… 7 分

所以 $f'(x)=\ln x+1-\dfrac{a}{x}\leqslant x-\dfrac{a}{x}$，即 $f'(\sqrt{a})\leqslant\sqrt{a}-\dfrac{a}{\sqrt{a}}=0$.

另一方面，$f'(\mathrm{e}^a)=\ln\mathrm{e}^a+1-\dfrac{a}{\mathrm{e}^a}>a+1-\dfrac{a}{\mathrm{e}^0}=1>0$，

所以存在 $t\in[\sqrt{a},\mathrm{e}^a)$，使得 $f'(t)=\ln t+1-\dfrac{a}{t}=0$，① ………………………… 9 分

即当 $0<x<t$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x>t$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

所以函数 $f(x)$ 存在最小值 $f(t)=g(a)=(t-a)\ln t$.

由①式，得 $\ln t=\dfrac{a-t}{t}$. 所以 $g(a)=-\dfrac{(t-a)^2}{t}\leqslant 0$（当且仅当 $a=t$，即 $\ln a=0$，$a=1$ 时，等号成立）.

所以 $g(a)_{\max}=g(1)=0$，即为所求. ………………………………………… 12 分

21. 解：

（1）由题意知，$RG=OR=2$. 不妨设 $G(2,2)$，代入抛物线 C 的方程可得 $p=1$. ………………… 4 分

（2）由（1）知，抛物线 C 的方程为 $y^2=2x$. 设 $A\left(\dfrac{y_1^2}{2},y_1\right)$，$B\left(\dfrac{y_2^2}{2},y_2\right)$，$M\left(\dfrac{y_3^2}{2},y_3\right)$，$N\left(\dfrac{y_4^2}{2},y_4\right)$，

则直线 AB 的斜率为 $k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{\dfrac{y_1^2}{2}-\dfrac{y_2^2}{2}}=\dfrac{2}{y_1+y_2}$.

所以直线 AB 的方程为 $y=\dfrac{2}{y_1+y_2}\left(x-\dfrac{y_1^2}{2}\right)+y_1$，即 $2x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$. ………………… 6 分

同理直线 AM，BN 的方程分别为 $2x-(y_1+y_3)y+y_1y_3=0$，$2x-(y_2+y_4)y+y_2y_4=0$.

由直线 AB 过 $Q(2,1)$ 及直线 AM，BN 过 $R(2,0)$ 可得 $4-(y_1+y_2)+y_1y_2=0$，$y_1y_3=y_2y_4=-4$.

又直线 MN 的方程为 $2x-(y_3+y_4)y+y_3y_4=0$，即 $2x+\left(\dfrac{4}{y_1}+\dfrac{4}{y_2}\right)y+\dfrac{16}{y_1y_2}=0$. ………………… 9 分

所以直线 MN 的方程为 $y_1y_2x+2(y_1+y_2)y+8=0$.

把 $4-(y_1+y_2)+y_1y_2=0$ 代入 $y_1y_2x+2(y_1+y_2)y+8=0$，得 $y_1y_2x+2(y_1y_2+4)y+8=0$.

由 $x+2y=0$，$8y+8=0$ 可得 $x=2$，$y=-1$. 所以直线 MN 过定点 $(2,-1)$. ………………… 12 分

（二）选考题：共 10 分。

22. 解：

（1）由 $\rho=2\sqrt{2}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$，得 $\rho=2\cos\theta+2\sin\theta$. 所以 $\rho^2=2\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta$.

将 $\begin{cases}\rho\cos\theta=x,\\ \rho\sin\theta=y\end{cases}$ 代入 $\rho^2=2\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta$，得 $x^2+y^2=2x+2y$，即 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

所以 C_2 的直角坐标方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$. ………………………………………… 5 分

（2）将 $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=-1+t\sin\alpha\end{cases}$ 代入 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 并整理，得 $t^2-(2\cos\alpha+4\sin\alpha)t+3=0$.

设 A，B 对应的参数分别为 t_1，t_2，则 t_1，t_2 是方程 $t^2-(2\cos\alpha+4\sin\alpha)t+3=0$ 的两根.

所以 $t_1+t_2=2\cos\alpha+4\sin\alpha$. ………………………………………………………………………… 7 分

因为 $|MN|=2$,所以 $\left|\dfrac{t_1+t_2}{2}\right|=2$. 所以 $\cos\alpha+2\sin\alpha=2$. 此时 $\Delta=(2\cos\alpha+4\sin\alpha)^2-12=4\times2^2-12>0$.

所以 $1-\sin^2\alpha=4(1-\sin\alpha)^2$. 所以 $(5\sin\alpha-3)(\sin\alpha-1)=0$. 所以 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ 或 $\sin\alpha=1$. …………… 10 分

23. 解:

(1) 由题意知, $f(x)=|x|+|2x+1|<2|x|+1$, 即 $|2x+1|-|x|<1$.

当 $x<-\dfrac{1}{2}$ 时, $-2x-1+x<1$. 解得 $-2<x<-\dfrac{1}{2}$.

当 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x<0$ 时, $2x+1+x<1$. 解得 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x<0$.

当 $x\geqslant0$ 时, $2x+1-x<1$. 无解.

综上所述,不等式的解集为 $(-2,0)$. …………………………………………………………… 5 分

(2) 由题意知, $a>0$, $f(x)=|x-a|+|2x+a+1|<2$ 有解.

当 $x<-\dfrac{a+1}{2}$ 时, $-3x-1<2$. 解得 $x>-1$. 此时有解,则 $-\dfrac{a+1}{2}>-1$. 解得 $a<1$.

当 $-\dfrac{a+1}{2}\leqslant x<a$ 时, $x+2a+1<2$. 解得 $x<1-2a$. 此时有解,则 $-\dfrac{a+1}{2}<1-2a$. 解得 $a<1$.

当 $x\geqslant a$ 时, $3x+1<2$. 解得 $x<\dfrac{1}{3}$. 此时有解,则 $a<\dfrac{1}{3}$.

综上所述,实数 a 的取值范围为 $0<a<1$. …………………………………………………… 10 分