2021年河南省普通高中毕业班高考适应性测试

理科数学试题参考答案及评分标准

一、选择题(每小题5分,共60分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	C	D	C	B	A	D	A	C	B	A

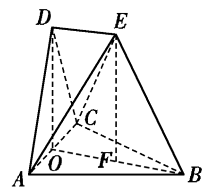
二、填空题(每小题5分,共20分)

13. 8　　14. $\frac{4}{3}$　　15. $\frac{13}{7}$或$\frac{3}{2}$　　16. $-\frac{3}{2}<\lambda<1$

三、解答题

(一)必考题:共60分。

17. (1)取 AC 的中点 O,连接 BO,DO.



由题意知,BO 为 $\angle ABC$ 的平分线,且 $BO\perp AC$,$DO\perp AC$.

设点 F 是点 E 在平面 ABC 上的射影,

由已知得,点 F 在 BO 上,连接 EF,则 $EF\perp$平面 ABC.

$\because$ 平面 $ACD\perp$平面 ABC,平面 $ACD\cap$平面 $ABC=AC$,$DO\subset$平面 ACD,$DO\perp AC$,

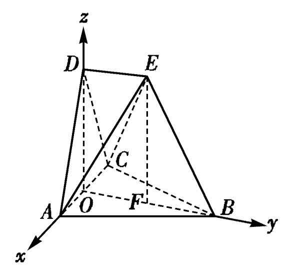
$\therefore DO\perp$平面 ABC. 同理可得 $BO\perp$平面 ADC. ………………………………… 4分

又$\because EF\perp$平面 ABC,$\therefore DO/\!/EF$.

$\because BE$ 和平面 ABC 所成的角为 $60°$,即 $\angle EBF=60°$,$\therefore DO=EF=2\sqrt{3}$.

$\therefore$ 四边形 $EFOD$ 为平行四边形. $\therefore DE/\!/BO$. $\therefore DE\perp$平面 ADC. ………………………… 6分

(2)以 OA,OB,OD 方向为 x 轴,y 轴,z 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$,



则 $A(2,0,0)$,$D(0,0,2\sqrt{3})$,$E(0,2\sqrt{3}-2,2\sqrt{3})$,$B(0,2\sqrt{3},0)$.

$\therefore \overrightarrow{AD}=(-2,0,2\sqrt{3})$,$\overrightarrow{DE}=(0,2\sqrt{3}-2,0)$,$\overrightarrow{BA}=(2,-2\sqrt{3},0)$. …… 8分

设平面 ADE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=-2x+2\sqrt{3}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=(2\sqrt{3}-2)y=0.\end{cases}$ 取 $z=1$,得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},0,1)$. …………… 10分

设 BA 与平面 ADE 所成的线面角为 θ,则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{BA}\rangle|=$

$\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BA}|}\right|=\frac{2\sqrt{3}}{2\times4}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

$\therefore BA$ 与平面 DAE 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$. …………………………………………………… 12分

18. (1)选择条件①:

$\because \frac{\sqrt{3}}{3}c\sin B=a-b\cos C$,$\therefore$ 由正弦定理得,$\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B=\sin A-\sin B\cos C$. ……………………… 2分

又在$\triangle ABC$中,$\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$,

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B=\sin A-\sin B\cos C=\cos B\sin C$. ………………………………………… 4分

又$\because C\in(0,\pi)$,$\therefore \sin C>0$. $\therefore \frac{\sqrt{3}}{3}\sin B=\cos B$,即 $\tan B=\sqrt{3}$. ……………………………… 5分

又$\because B\in(0,\pi)$,$\therefore B=\frac{\pi}{3}$. …………………………………………………………………… 6分

选择条件②:

$\because b\sin C=c\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$,$\therefore$ 由正弦定理得,$\sin B\sin C=\sin C\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$. ……………………… 2分

又$\because C\in(0,\pi)$,$\therefore \sin C>0$.

$\therefore \sin B=\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$，即 $\sin B=\cos B\cos\frac{\pi}{6}+\sin B\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B$. …………………… 4 分

$\therefore \frac{1}{2}\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B$，即 $\tan B=\sqrt{3}$. …………………… 5 分

又$\because B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$. …………………… 6 分

(2)由题意知 $2\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$.

$\therefore 4|\overrightarrow{BD}|^2=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})^2$，即 $16=a^2+c^2+ac$. …………………… 8 分

又$\because a^2+c^2\geqslant 2ac$，$\therefore ac\leqslant\frac{16}{3}$(当且仅当 $a=c=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立). …………………… 10 分

由三角形面积公式可知 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore \triangle ABC$ 的面积的最大值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. …………………… 12 分

19.(1)由图 1 知，“年轻人”占比为 80%，“非年轻人”占比为 20%.

由图 2 知，“经常使用直播销售用户”占比为 60%，“不常使用直播销售用户”占比为 40%.

$\therefore$ 补全的列联表如下：

	年轻人	非年轻人	合计
经常使用直播销售用户	100	20	120
不常使用直播销售用户	60	20	80
合计	160	40	200

于是 $a=100,b=20,c=60,d=20$. …………………… 2 分

$\therefore K^2=\frac{200\times(100\times20-60\times20)^2}{120\times80\times160\times40}=\frac{25}{12}\approx2.083>2.072$，即有 85% 的把握认为经常使用网络直播销售与年龄有关. …………………… 4 分

(2)若按方案一，设获利 X_1 万元，则 X_1 可取的值为 $300,-150,0$. X_1 的分布列为：

X_1	300	-150	0
p	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

$E(X_1)=300\times\frac{7}{10}+(-150)\times\frac{1}{5}+0\times\frac{1}{10}=180$,

$D(X_1)=(300-180)^2\times\frac{7}{10}+(-150-180)^2\times\frac{1}{5}+(0-180)^2\times\frac{1}{10}=120^2\times\frac{7}{10}+330^2\times\frac{1}{5}+180^2\times\frac{1}{10}=35100$.

$\therefore X_1$ 的期望 $E(X_1)=180$，方差 $D(X_1)=35100$. …………………… 7 分

若按方案二，设获利 X_2 万元，则 X_2 可取的值为 $500,-300,0$. X_2 的分布列为：

X_2	500	-300	0
p	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

$E(X_2)=500\times\frac{3}{5}+(-300)\times\frac{3}{10}+0\times\frac{1}{10}=210$,

$D(X_2)=(500-210)^2\times\frac{3}{5}+(-300-210)^2\times\frac{3}{10}+(0-210)^2\times\frac{1}{10}=290^2\times\frac{3}{5}+510^2\times\frac{3}{10}+210^2\times\frac{1}{10}=132900$.

$\therefore X_2$ 的期望 $E(X_2)=210$，方差 $D(X_2)=132900$. …………………… 10 分

$\because E(X_1)=180<E(X_2)=210$，$D(X_1)=35100<D(X_2)=132900$,

$\therefore$ 从获利的均值方面看方案二线上直播销售获得的利润更多些，但是，方案二的方差要比方案一的方差大得多，从稳定性方面看方案一线下销售更稳妥.

$\therefore$ 从获得角度考虑，应该选择方案二；从规避风险角度考虑，应该选择方案一. …………………… 12 分

(考生给出一个选择，并能够说明理由即可)

20. (1) 由题意知直线 $l: y=x+a$ 与 x 轴交于点 $(-a,0)$. $\therefore$ 点 M 为椭圆 C 的左顶点，即 $M(-a,0)$.

$\therefore$ 设 $N\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$，代入椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，得 $\frac{1}{4}+\frac{a^2}{4b^2}=1$，即 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{3}$. ………………………… 3 分

$\therefore e^2=\frac{c^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{2}{3}$. $\therefore e=\frac{\sqrt{6}}{3}$，即椭圆 C 的离心率 $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$. ………………………… 5 分

(2) 由题意得 $a=2$. $\therefore$ 椭圆 $C: b^2x^2+4y^2=4b^2(b>0)$.

由 $\begin{cases} b^2x^2+4y^2=4b^2 \\ y=kx+2 \end{cases}$，消去 y，得 $(4k^2+b^2)x^2+16kx+16-4b^2=0$.

$\therefore \begin{cases} \Delta=16b^2(4k^2+b^2-4)>0, \\ x_M+x_N=-\frac{16k}{4k^2+b^2}, \\ x_M \cdot x_N=\frac{16-4b^2}{4k^2+b^2}. \end{cases}$ ………………………… 7 分

$\because$ 直线 $QM: y=\frac{y_M}{x_M-2}(x-2)$，$\therefore A\left(0,-\frac{2y_M}{x_M-2}\right)$，$\overrightarrow{PA}=\left(0,\frac{2y_M+2x_M-4}{2-x_M}\right)$.

$\because y_M=kx_M+2$，

$\therefore y_M-2=kx_M$，即 $\overrightarrow{PA}=\left(0,\frac{2(k+1)x_M}{2-x_M}\right)$.

同理 $\overrightarrow{PB}=\left(0,\frac{2(k+1)x_N}{2-x_N}\right)$. ………………………… 10 分

$\therefore \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{4(k+1)^2x_Mx_N}{x_Mx_N-2(x_M+x_N)+4}=4-b^2=1$. $\therefore b^2=3$.

$\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………… 12 分

21. (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$， ………………………… 1 分

$f'(x)=2ax-(6+a)+\frac{3}{x}=\frac{2ax^2-(6+a)x+3}{x}=\frac{(2x-1)(ax-3)}{x}$. ………………………… 2 分

$\because a\leqslant 0$，$\therefore ax-3<0$.

当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减. ………………………… 4 分

(2) 设 $g(x)=f(x)+ax-b=ax^2-6x+3\ln x-b$，

则 $g'(x)=2ax-6+\frac{3}{x}=\frac{2ax^2-6x+3}{x}$. ………………………… 5 分

$\because$ 当 $a<0$ 时，$2ax^2-6x+3=0$ 有两个根 x_1,x_2，不妨令 $x_1<x_2$，

又 $x_1x_2=\frac{3}{2a}<0$，$\therefore x_1<0, x_2>0$. 由题意舍去 x_1.

$\therefore$ 当 $x\in(0,x_2)$ 时，$g'(x)>0$，当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$.

$\therefore g(x)$ 在 $(0,x_2)$ 上单调递增，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减.

$\because$ 存在 x_0 使 $f(x)+ax-b\geqslant 0$ 成立，$\therefore g(x)_{\max}=g(x_2)=ax_2^2-6x_2+3\ln x_2-b\geqslant 0$，即 $ax_2^2-6x_2+3\ln x_2\geqslant b$.

………………………… 8 分

又 $2ax_2^2-6x_2+3=0$，$\therefore a=\frac{6x_2-3}{2x_2^2}$.

$\because a\leqslant -\frac{9}{2}$，$\therefore \frac{6x_2-3}{2x_2^2}\leqslant -\frac{9}{2}$. $\therefore 0<x_2\leqslant\frac{1}{3}$. ………………………… 9 分

$\therefore b\leqslant ax_2^2-6x_2+3\ln x_2=\frac{6x_2-3}{2x_2^2}\cdot x_2^2-6x_2+3\ln x_2=-3x_2+3\ln x_2-\frac{3}{2}$.

令 $h(x)=-3x+3\ln x-\dfrac{3}{2}\left(0<x\leqslant\dfrac{1}{3}\right)$,则 $h'(x)=\dfrac{3-3x}{x}>0$.

∴ 函数 $h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{3}\right]$ 上单调递增.

∴ $h(x)_{\max}=h\left(\dfrac{1}{3}\right)=-3\ln 3-\dfrac{5}{2}$,即 b 的最大值为 $-3\ln 3-\dfrac{5}{2}$. ………………………………… 12 分

(二)选考题:共 10 分。

22. (1)半圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\varphi,\\ y=1+\sin\varphi\end{cases}$(其中 φ 为参数,$\varphi\in(0,\pi)$),……………………………………… 3 分

直线 l 的直角坐标方程为 $y=x\tan\alpha-2,\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. ……………………………………………………… 5 分

(2)由题意可知,$A\left(\dfrac{2}{\tan\alpha},0\right)$,$B(0,-2)$,$D(\cos 2\alpha,1+\sin 2\alpha)$,

点 D 到直线 AB 的距离为:

$d=\dfrac{|\tan\alpha\cdot\cos 2\alpha-(1+\sin 2\alpha)-2|}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=|\sin\alpha\cos 2\alpha-\cos\alpha\sin 2\alpha-3\cos\alpha|=\sin\alpha+3\cos\alpha$, ………………… 7 分

$|AB|=\sqrt{(-2)^2+\left(\dfrac{2}{\tan\alpha}\right)^2}=\dfrac{2}{\sin\alpha}$. ……………………………………………………………………… 8 分

∴ 三角形 ABD 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d=1+\dfrac{3}{\tan\alpha}=1+\sqrt{3}$. ……………………………………………… 9 分

∴ $\tan\alpha=\sqrt{3}$. 又∵ $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,∴ $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………… 10 分

23. (1)由题意知,$0<a+\dfrac{b}{2}<1$. ∴ $ab=2a\cdot\dfrac{b}{2}\leqslant 2\left(\dfrac{a+\dfrac{b}{2}}{2}\right)^2<2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$.

∴ 不存在满足已知条件的 a,b,使得 $ab=\dfrac{1}{2}$. ………………………………………………………………… 5 分

(2)由柯西不等式,得

$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2=\left(1\cdot\sqrt{a}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{\dfrac{b}{2}}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{\dfrac{c}{3}}\right)^2\leqslant[1^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2]\cdot\left(a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}\right)=6$. …… 8 分

∴ $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leqslant\sqrt{6}$. 等号成立的条件为 $\dfrac{\sqrt{a}}{1}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{b}{2}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{c}{3}}}{\sqrt{3}}$,结合 $a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=1$,可知 $a=\dfrac{1}{6},b=\dfrac{2}{3},c=\dfrac{3}{2}$.

∴ $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ 的最大值为 $\sqrt{6}$. ……………………………………………………………… 10 分