2021年河南省普通高中毕业班高考适应性测试

文科数学试题参考答案及评分标准

一、选择题（每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	B	C	C	C	A	C	C	D	D	B	A

二、填空题（每小题5分，共20分）

13. 8　　14. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　15. $\frac{13}{7}$或$\frac{3}{2}$　　16. $2\sqrt{3}$

三、解答题

17. 解：

(1) $\lambda=\mu=1$ 时，$S_n=2^n+(n-1)^2-2$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n+(n-1)^2-2-2^{n-1}-(n-2)^2+2=2^{n-1}+2n-3$，…… 4分

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=0$ 也符合上式，

$\therefore$ 数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^{n-1}+2n-3$. …… 5分

(2) 若存在符合条件的实数 λ,μ，

由于 $S_1=2\lambda-2, S_2=4\lambda+\mu-2, S_3=8\lambda+4\mu-2, S_4=16\lambda+9\mu-2$，

$\therefore a_1=S_1=2\lambda-2, a_2=S_2-S_1=2\lambda+\mu, a_3=S_3-S_2=4\lambda+3\mu, a_4=S_4-S_3=8\lambda+5\mu$，

从而 $a_2-a_1=\mu+2, a_3-a_2=2\lambda+2\mu, a_4-a_3=4\lambda+2\mu$，

由于数列$\{a_n\}$是等差数列，$\therefore \mu+2=2\lambda+2\mu=4\lambda+2\mu$，$\therefore \lambda=0, \mu=2$. …… 9分

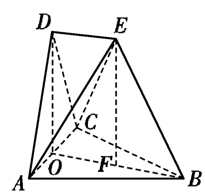
当 $\lambda=0,\mu=2$ 时，$S_n=2(n-1)^2-2=2n^2-4n$，

由此 $a_n=4n-6$，数列$\{a_n\}$是等差数列，符合题意. …… 11分

$\therefore$ 存在实数 $\lambda=0,\mu=2$，使得数列$\{a_n\}$是等差数列. …… 12分

18. 证明：

(1) 取 AC 中点 O，连接 BO, DO.



由题意，BO 为$\angle ABC$ 的平分线，且 $BO\perp AC, DO\perp AC$.

设点 F 是点 E 在平面 ABC 上的射影，

由已知得，点 F 在 BO 上，连接 EF，则 $EF\perp$平面 ABC.

$\because$ 平面 $ACD\perp$平面 ABC，平面 $ACD\cap$平面 $ABC=AC$，$DO\subset$平面 ACD，$DO\perp AC$，

$\therefore DO\perp$平面 ABC，同理可得 $BO\perp$平面 ADC，…… 4分

又$\because EF\perp$平面 ABC，$\therefore DO /\!/ EF$.

$\because BE$ 和平面 ABC 所成的角为 $60°$，即$\angle EBF=60^\circ$，$\therefore DO=EF=2\sqrt{3}$，

$\therefore$ 四边形 $EFOD$ 为平行四边形，$DE /\!/ BO$，$\therefore DE\perp$平面 ADC. …… 6分

(2) $\because V_{DE-ABC}=V_{A-DEC}+V_{A-BCE}$，

$DE=OF=OB-BF=2\sqrt{3}-2$，

又 $DE\perp$面 ADC，$S_{\triangle ADC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 16=4\sqrt{3}$，…… 7分

$\therefore V_{A-DEC}=V_{E-ADC}=\frac{1}{3}\times 4\sqrt{3}\times(2\sqrt{3}-2)=8-\frac{8}{3}\sqrt{3}$, ………………………………………………………… 9 分

$V_{A-BCE}=V_{E-ABC}=\frac{1}{3}\times 4\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}=8$, ……………………………………………………………… 11 分

$\therefore V_{DE-ABC}=V_{A-DEC}+V_{A-BCE}=16-\frac{8}{3}\sqrt{3}$. ……………………………………………………………… 12 分

19. 解：

(1)由图 1,“年轻人”占比为 80%,“非年轻人”占比为 20%,

由图 2,“经常使用直播销售用户”占比为 60%,“不常使用直播销售用户”占比为 40%,

∴ 补全的列联表如下：

	年轻人	非年轻人	合计
经常使用直播销售用户	100	20	120
不常使用直播销售用户	60	20	80
合计	160	40	200

于是 $a=100, b=20, c=60, d=20$, ……………………………………………………………………… 3 分

$\therefore K^2=\frac{200\times(100\times 20-60\times 20)^2}{120\times 80\times 160\times 40}=\frac{25}{12}\approx 2.083>2.072$,

即有 85%的把握可以认为经常使用直播销售与年龄有关. ………………………………………… 6 分

(2)从经常使用直播销售的居民中抽取 3 人,不妨记作 A,B,C,从不常使用直播销售的居民中抽取 2 人,不妨记作 d,e.

则从这 5 人中抽取 3 人包含(A,B,C)(A,B,d) (A,B,e) (A,C,d) (A,C,e) (A,d,e) (B,C,d) (B,C,e) (B,d,e)(C,d,e)共 10 种情况. ……………………………………………………………… 8 分

至少有 2 人是经常使用直播销售的居民包含(A,B,C)(A,B,d) (A,B,e) (A,C,d) (A,C,e) (B,C,d) (B,C,e)共 7 种情况. ……………………………………………………………………… 10 分

∴ 从这 5 人中抽取 3 人至少有 2 人是经常使用直播销售的居民概率是 $P=\frac{7}{10}$. …………… 12 分

20. 解：

(1)由题意 $f'(x)=ae^x+e^{-x}-a-1=(e^x-1)(a-e^{-x})=ae^{-x}(e^x-1)\left(e^x-\frac{1}{a}\right)$, …………………… 1 分

$\because a=e$, $\therefore f'(x)=e^{1-x}(e^x-1)\left(e^x-\frac{1}{e}\right)$,令 $f'(x)=0$ 得,$x=0$ 或 $x=-1$, …………………… 2 分

故 $x<-1$ 或 $x>0$ 时,$f'(x)>0$,$-1<x<0$ 时,$f'(x)<0$, ……………………………………………… 4 分

∴ 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增,在 $(-1,0)$ 上单调递减. ………………………… 5 分

(2)$\because a>1$, $\therefore -\ln a<0$,故 $x<-\ln a$ 或 $x>0$ 时,$f'(x)>0$,$-\ln a<x<0$ 时,$f'(x)<0$,

$\therefore x_1=-\ln a$,$x_2=0$,$f(x_1)=1-a+(a+1)\ln a$,$f(x_2)=a-1$,

注意到 $f(x_1)-f(x_2)=2-2a+(a+1)\ln a$, ……………………………………………………………… 8 分

令 $g(x)=2-2x+(x+1)\ln x\ (x>1)$,则 $g'(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$,

令 $u(x)=g'(x)$，则 $u'(x)=\frac{x-1}{x^2}>0$，$\therefore$ 函数 $u(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 为增函数，

即 $g'(x)=u(x)>u(1)=0$，$\therefore g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 为增函数，…………………………………… 10 分

方程 $g(x)=4$ 在 $(1,+\infty)$ 上至多有一个实数解，

又$\because g(e^2)=2-2e^2+2(e^2+1)=4$，

$\therefore a=e^2$ 为所求. ……………………………………………………………………………… 12 分

21. 解：

(1) 由题知直线 l 与 x 轴交于点 $(-a,0)$，$\therefore$ 点 M 为椭圆 C 左顶点，即 $M(-a,0)$，

$\therefore$ 设 $N\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$，代入椭圆 C：$\frac{1}{4}+\frac{a^2}{4b^2}=1$，得 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{3}$，…………………………………… 3 分

$e^2=\frac{c^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{2}{3}$，即椭圆 C 的离心率 $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$. …………………………………………… 5 分

(2) 由题意 $a=2$，椭圆 C：$b^2x^2+4y^2=4b^2(b>0)$，

由 $\begin{cases} b^2x^2+4y^2=4b^2, \\ y=kx+2, \end{cases}$ 消 y 得 $(4k^2+b^2)x^2+16kx+16-4b^2=0$，

$\therefore \begin{cases} \Delta=16b^2(4k^2+b^2-4)>0, \\ x_M+x_N=-\frac{16k}{4k^2+b^2}, \\ x_M\cdot x_N=\frac{16-4b^2}{4k^2+b^2}, \end{cases}$ ……………………………………………………………… 7 分

$\because$ 直线 QM：$y=\frac{y_M}{x_M-2}(x-2)$，$\therefore A\left(0,-\frac{2y_M}{x_M-2}\right)$，$\overrightarrow{PA}=\left(0,\frac{2y_M+2x_M-4}{2-x_M}\right)$，

$\therefore y_M=kx_M+2$，$\therefore y_M-2=kx_M$，

即 $\overrightarrow{PA}=\left(0,\frac{2(k+1)x_M}{2-x_M}\right)$，同理 $\overrightarrow{PB}=\left(0,\frac{2(k+1)x_N}{2-x_N}\right)$，………………………………… 10 分

$\therefore \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{4(k+1)^2x_Mx_N}{x_Mx_N-2(x_M+x_N)+4}=4-b^2=1$，$\therefore b^2=3$，

即椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …………………………………………………… 12 分

22. 解：

(1) 半圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\varphi, \\ y=1+\sin\varphi, \end{cases}$（其中 φ 为参数，$\varphi\in(0,\pi)$），…………………………… 3 分

直线 l 的直角坐标方程为 $y=x\tan\alpha-2$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. ……………………………………………… 5 分

(2) 由题意可知，$A\left(\frac{2}{\tan\alpha},0\right)$，$B(0,-2)$，$D(\cos2\alpha,1+\sin2\alpha)$，

点 D 到直线 AB 的距离为：

$d=\frac{|\tan\alpha\cdot\cos2\alpha-(1+\sin2\alpha)-2|}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=|\sin\alpha\cos2\alpha-\cos\alpha\sin2\alpha-3\cos\alpha|=\sin\alpha+3\cos\alpha$，……………… 7 分

$|AB|=\sqrt{(-2)^2+\left(\frac{2}{\tan\alpha}\right)^2}=\frac{2}{\sin\alpha}$, ………………………………………………………… 8 分

$\therefore$ 三角形 ABD 的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d=1+\frac{3}{\tan\alpha}=1+\sqrt{3}$, ………………………………………… 9 分

$\therefore \tan\alpha=\sqrt{3}$, 又$\because$ $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\therefore$ $\alpha=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………………… 10 分

23. 解：

(1) 由条件 $0<a+\frac{b}{2}<1$, 从而 $ab=2a\cdot\frac{b}{2}\leqslant 2\left(\frac{a+\frac{b}{2}}{2}\right)^2<2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 不存在满足已知条件的 a,b, 使得 $ab=\frac{1}{2}$. ………………………………………………… 5 分

(2) 由柯西不等式可得：

$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2=\left(1\cdot\sqrt{a}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{b}{2}}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{c}{3}}\right)^2$

$\leqslant[1^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2]\cdot\left(a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}\right)=6$, ………………………………………………… 8 分

$\therefore \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leqslant\sqrt{6}$, 等号成立的条件为 $\frac{\sqrt{a}}{1}=\frac{\sqrt{\frac{b}{2}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{\frac{c}{3}}}{\sqrt{3}}$, 结合 $a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=1$,

可知 $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{2}{3}$, $c=\frac{3}{2}$,

$\therefore \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ 的最大值为 $\sqrt{6}$. ………………………………………………………… 10 分